2.3. Характеристики поля уединенного диполя.

Если вектор магнитного поля объекта и ось линейного лока тора расположены произвольным образом, то можно ориентировать оси координат так, как показано на рис. I. Опорная плоскость ХУ проходит через ось локатора и прямую, соединяющую объект с локатором. Разложив вектор $\vec{M}$ на две составляющие M_z и M_{xy}, можно теперь рассматривать две совершенно изолированные задачи, т.к. компонента M_z не создает сигнала в плоскости ХУ (сигнал возникает только в измер телях, ориентированных вдоль вертикальной оси Z), а компонента M_{xy} в свою очередь, не дает вклада в показания магнитометрических устр ройств, ориентированных вдоль оси Z.

Общая формула поля диполя:

$$\vec{H} = \frac{3\vec{r}(\vec{M}\vec{r}) - \vec{M}r^2}{4\pi r^5} \qquad (8)$$

позволяет получить для Z -компоненты:

$$H_z = -\frac{M_z}{4\pi r^3} = -\frac{M_z}{4\pi (x^2+y^2)^{3/2}} \qquad (9)$$

а для компонент H_r и H_φ (H_r ориентировано вдоль вектора $\vec{r}$, H_φ – перпендикулярно H_r в опррной плоскости):

$$H_r = -\frac{M_{xy}\cos\varphi}{2\pi r^3} \qquad (10)$$

$$H_\varphi = +\frac{M_{xy}\sin\varphi}{4\pi r^3} \qquad (11)$$

Переходя к координатам, "привязанным" к локатору и учитывая соотношения $x = +r\cos\alpha$ и $y = r\sin\alpha$, получим:

$$H_x = -\frac{M_{xy}}{4\pi}\cdot\frac{2x\cos\varphi + y\sin\varphi}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{M_{xy}}{4\pi r^3}(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) \qquad (12)$$

$$H_y = \frac{M_{xy}}{4\pi}\cdot\frac{x\sin\varphi - 2y\cos\varphi}{(x^2+y^2)^2} = \frac{M_{xy}}{4\pi r^3}(\cos\alpha\sin\varphi - 2\sin\alpha\cos\varphi) \qquad (13)$$

Дифференцируя все компоненты поля по Х и У, получаем ос-

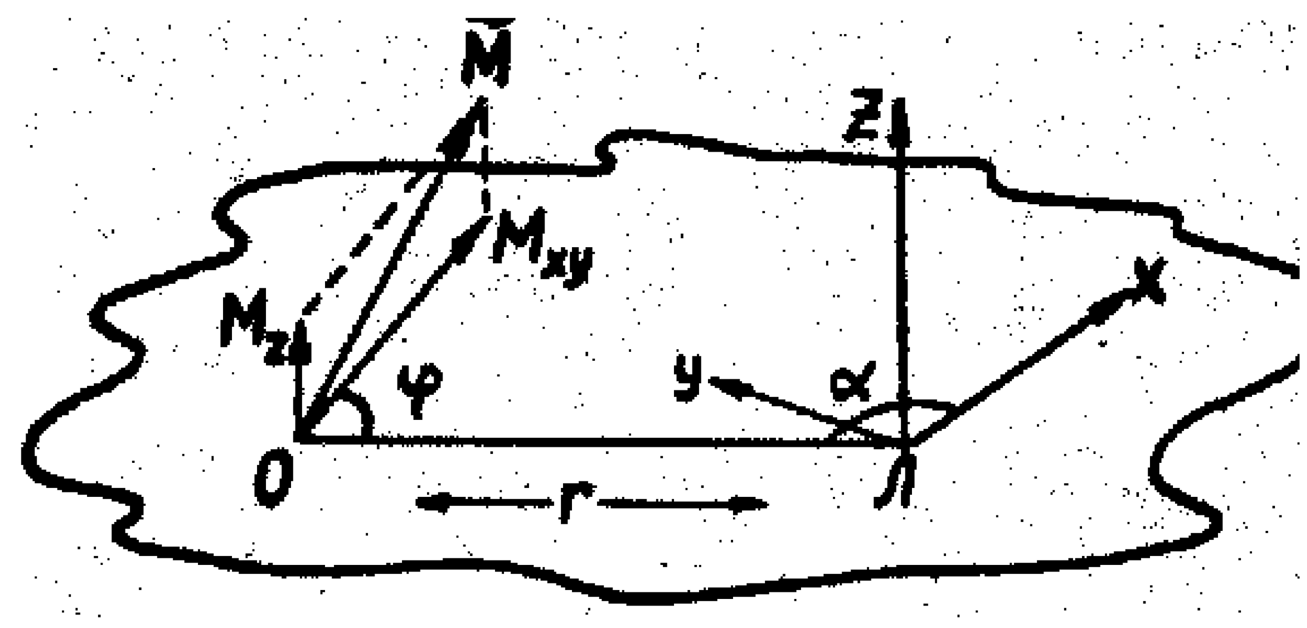


Рис.1. К расчету характеристик поля диполя.

новные формулы для последующих расчетов:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{3}{4}\,\frac{M_z}{\pi}\,\frac{x}{(x^2+y^2)^{5/2}} = -\frac{3}{4}\,\frac{M_z}{\pi r^4}\cos\alpha \tag{I4}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{3}{4}\,\frac{M_z}{\pi}\,\frac{y}{(x^2+y^2)^{5/2}} = -\frac{3}{4}\,\frac{M_z}{\pi r^4}\sin\alpha \tag{I5}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{M_{xy}}{\pi}\,\frac{(3x^2-y^2)\cos\varphi + 2xy\sin\varphi}{2\cdot(x^2+y^2)^3} = \tag{I6}$$

$$= \frac{M_{xy}}{2\pi r^4}\left[(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\varphi + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\right]$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{M_{xy}}{\pi}\,\frac{(3y^2-x^2)\sin\varphi + 8xy\cos\varphi}{4(x^2+y^2)^3} = \tag{I7}$$

$$= \frac{M_{xy}}{4\pi r^4}\left[(3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\sin\varphi + 8\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi\right]$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{M_{xy}}{\pi}\,\frac{(y^2-3x^2)\sin\varphi + 8xy\cos\varphi}{4(x^2+y^2)^3} = \tag{I8}$$

$$= \frac{M_{xy}}{4\pi r^4}\left[(\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha)\sin\varphi + 8\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi\right]$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{M_{xy}}{\pi}\,\frac{(3y^2-x^2)\cos\varphi - 2xy\sin\varphi}{2(x^2+y^2)^3} = \tag{I9}$$

$$= \frac{M_{xy}}{2\pi r^4}\left[(3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\cos\varphi - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\right]$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{3M_z}{4\pi}\,\frac{4x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{7/2}} = \frac{3M_z}{4\pi r^5}(4\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x\,\partial y} = \frac{15 M_z xy}{4\pi(x^2+y^2)^{7/2}} = \frac{15 M_z}{4\pi r^5}\sin\alpha\cos\alpha \tag{2I}$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} = \frac{M_{xy}}{\pi}\,\frac{6x(y^2-x^2)\cos\varphi - y(5x^2-y^2)\sin\varphi}{(x^2+y^2)^4} = \tag{22}$$

$$= \frac{M_{xy}}{\pi r^5}\left[6\cos\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\cos\varphi - \sin\alpha(5\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\varphi\right]$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} = -\frac{M_{xy}}{\pi}\,\frac{x(5y^2-x^2)\sin\varphi + 2y(5x^2-y^2)\cos\varphi}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= -\frac{M_{xy}}{\pi r^5}\left[\cos\alpha(5\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\sin\varphi + 2\sin\alpha(5\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos\varphi\right] \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \frac{M_{xy}}{\pi}\,\frac{3x(x^2-y^2)\sin\varphi - 2y(5x^2-y^2)\cos\varphi}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{M_{xy}}{\pi r^5}\left[3\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\varphi - 2\sin\alpha(5\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos\varphi\right] \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} = \frac{M_{xy}}{\pi}\,\frac{y(5x^2-y^2)\sin\varphi - 2x(5y^2-x^2)\cos\varphi}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{M_{xy}}{\pi r^5}\left[\sin\alpha(5\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\varphi - 2\cos\alpha(5\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\cos\varphi\right] \tag{25}$$

$$\frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} = \frac{15M_z\,x(3y^2-4x^2)}{4\pi(x^2+y^2)^{9/2}} = \frac{15M_z}{4\pi r^6}\cos\alpha(3\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha) \tag{26}$$

$$\frac{\partial^3 H_x}{\partial x^3} = \frac{2M_{xy}}{\pi}\,\frac{(3y^4+15x^4-30x^2y^2)\cos\varphi + 3xy(5x^2-3y^2)\sin\varphi}{(x^2+y^2)^5} =$$

$$= \frac{6M_{xy}}{\pi r^6}\left[\cos\varphi(\sin^4\alpha+5\cos^4\alpha-10\sin^2\alpha\cos^2\alpha) + \sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi(5\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha)\right] \tag{27}$$

$$\frac{\partial^3 H_y}{\partial x^3} = \frac{3M_{xy}}{\pi}\,\frac{\sin\varphi(10x^2y^2-5x^4-y^4) + 4xy\cos\varphi(5x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^6} =$$

$$= \frac{3M_{xy}}{\pi r^6}\left[\sin\varphi(10\sin^2\alpha\cos^2\alpha-5\cos^4\alpha-\sin^4\alpha) + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\varphi(5\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha)\right] \tag{28}$$

$$\frac{\partial^4 H_z}{\partial x^4} = \frac{45M_z}{4\pi}\,\frac{32x^4-30x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^{11/2}} = \frac{45M_z}{4\pi r^7}(32\cos^4\alpha - 30\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha) \tag{29}$$

$$\frac{\partial^4 H_x}{\partial x^4} = -\frac{6M_{xy}}{\pi}\,\frac{10x(3x^4-10x^2y^2+3y^4)\cos\varphi + y(35x^4-42x^2y^2+3y^4)\sin\varphi}{(x^2+y^2)^6} =$$

$$= -\frac{6M_{xy}}{\pi r^7}\left[10\cos\alpha\cos\varphi(3\cos^4\alpha-10\sin^2\alpha\cos^2\alpha+3\sin^4\alpha) + \sin\alpha\sin\varphi(35\cos^4\alpha-42\sin^2\alpha\cos^2\alpha+3\sin^4\alpha)\right] \tag{30}$$

$$\frac{\partial^4 H_y}{\partial x^4} = \frac{6 M_{xy}}{\pi} \frac{5x(3x^4-10x^2y^2+3y^4)\sin\psi - 2y(35x^4-42x^2y^2+3y^4)\cos\psi}{(x^2+y^2)^6} =$$

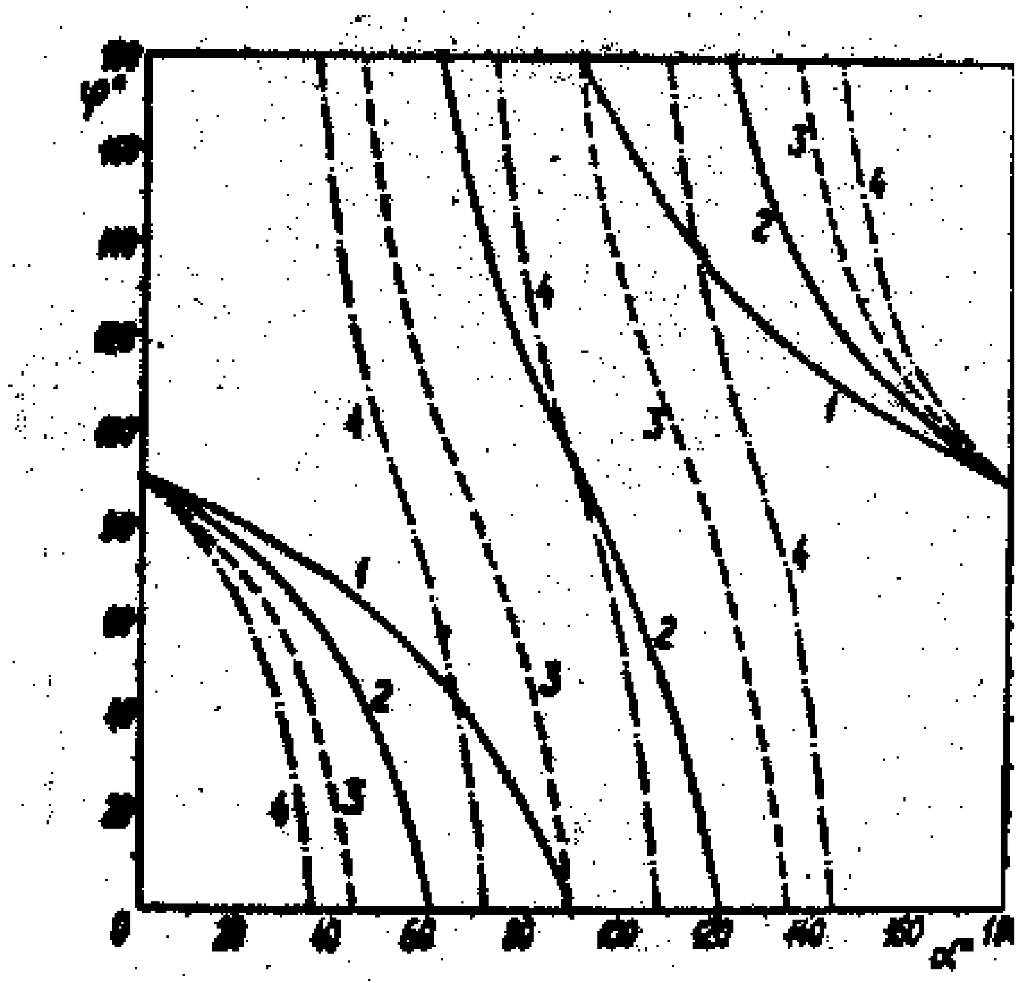
$$= \frac{6M_{xy}}{\pi r^7}\left[5\cos\alpha\sin\psi(3\cos^4\alpha-10\cos^2\alpha\sin^2\alpha+3\sin^4\alpha) - \right.$$
$$\left. - 2\sin\alpha\cos\psi(35\cos^4\alpha-42\sin^2\alpha\cos^2\alpha+3\sin^4\alpha)\right] \qquad (31)$$

При дальнейшем анализе работы локаторов важно знать, при каких углах α и ψ та или иная производная обращается в нуль. Эти "нулевые" комбинации углов определяются решениями соответствующих тригонометрических уравнений ((16)-(31) с нулевой левой частью), они приведены на рис. 2*. Что касается Z - компоненты и ее производных, то они от ψ не зависят, поэтому здесь фиксируются конкретные углы α , при которых та или иная производная равна нулю, эти углы сведены в таблицу 5.

Таблица 5. Критические углы $\alpha_{кр}$, при которых та или ина производная Z -компоненты поля равна нулю.

Наименование нулевой компоненты	$\alpha_{кр}$
$\frac{\partial H_z}{\partial x}$	α_1 = 90°; 270°
$\frac{\partial H_z}{\partial y}$	α_2 = 0°; 180°
$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}$	α_3 = 63,4°; 116,6°; 243,4°; 296,6°
$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y}$	α_4 = 0°; 90°; 180°; 270°
$\frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3}$	α_5 = 49°; 90°; 131°; 229°; 270°; 311°
$\frac{\partial^4 H_z}{\partial x^4}$	α_6 = 66,2°; 78,6°; 101,4°; 113,8°; 246,2°; 258,6°; 281,4°; 293,8°

*Полная картина угловой зависимости каждой из производных поля приведена на графиках Приложения А



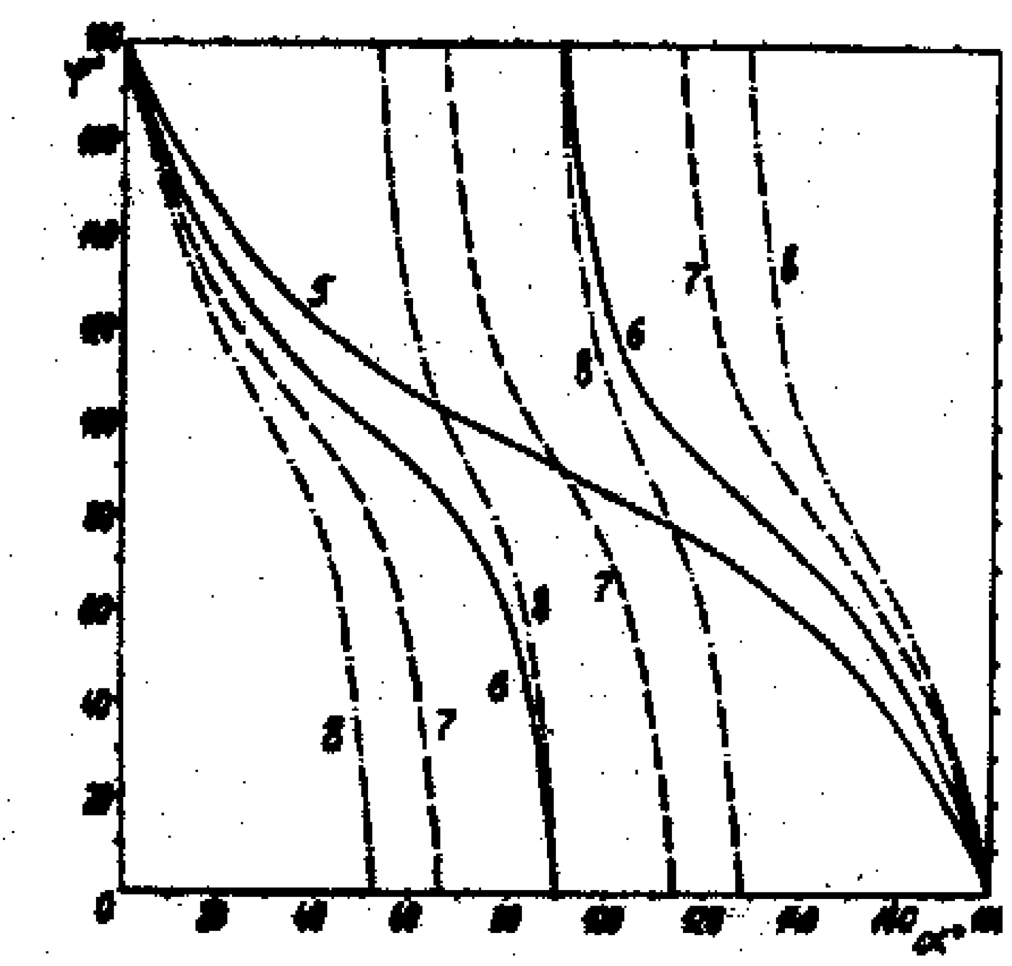


Рис. 2. Нулевые линии производных поля в плоскости углов α и φ. I- H_x, 2- $\frac{\partial H_x}{\partial x}$, 3- $\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}$, 4- $\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}$,
5- H_y, 6- $\frac{\partial H_y}{\partial x}$, 7- $\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}$, 8- $\frac{\partial^3 H_y}{\partial x^3}$.

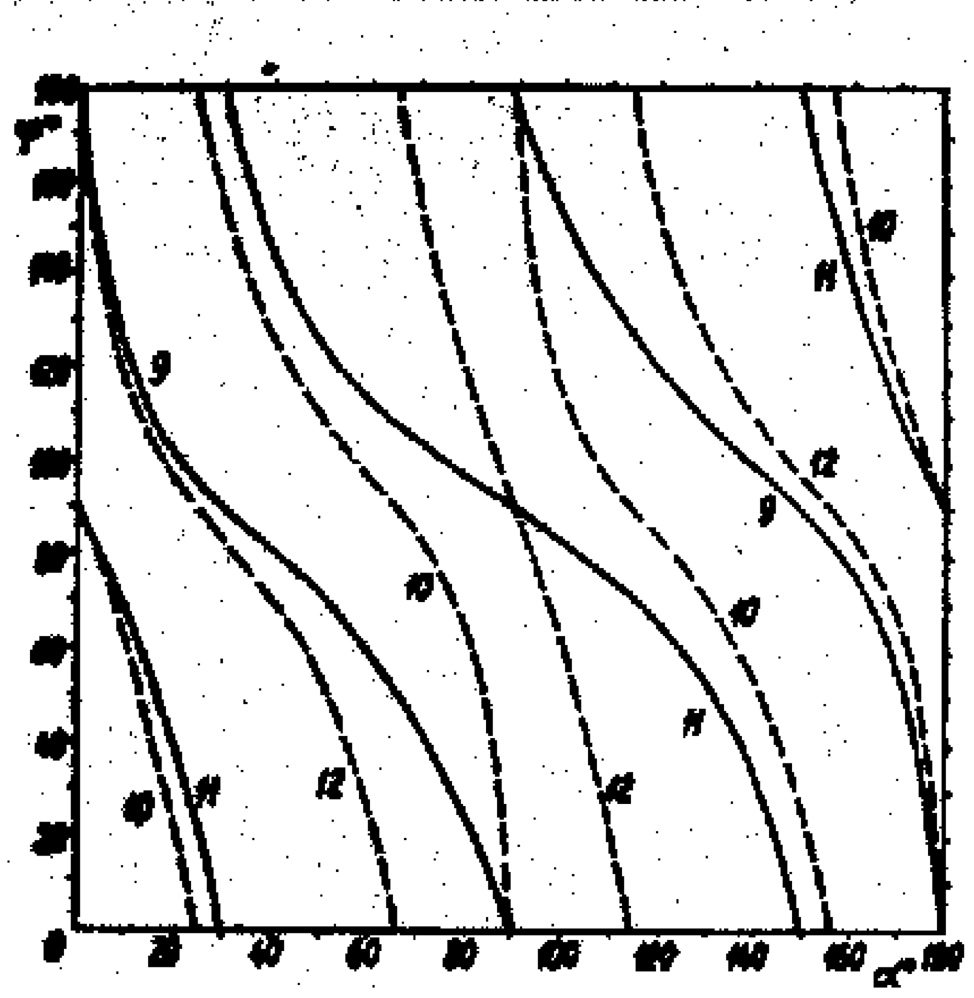


Рис.2. Нулевые линии произвсдных поля в плоскости углов α и φ .(продолжение). 9-$\frac{\partial H_x}{\partial y}$, I0-$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y}$, II- $\frac{\partial H_y}{\partial y}$, I2- $\frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y}$.